Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 1/07/2021

1) Determinare l'estremo inferiore, l'estremo superiore e, se esistono, massimo e minimo dell'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n-3}{n+1}\,,\; n \in \mathbb{N} \right\} .$$

2) Data la funzione

$$f(x) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,,$$

determinare l'eventuale asintoto orizzontale o l'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log(x-1) + \frac{1}{x-2}$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx .$$

Soluzione

1) Analizzando i primi elementi dell'insieme ed il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{n+1} = 1$, si intuisce che $\boxed{Inf(A) = -1}$ (è anche $\min(A) = -1$ essendo un elemento dell'insieme) e $\boxed{Sup(A) = 1}$. I due valori indicati soddisfano, rispettivamente, le definizione di Inf (Min) e Sup dell'insieme A.

2) Calcoliamo il limite della funzione per x che tende a $+\infty$. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \right) = +\infty\,.$$

Non è presente un asintoto orizzontale ma potrebbe esserci un asintoto obliquo. Per questo calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \right) \frac{1}{x} = 2\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - 2x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \left(x - \sqrt{x^2+9} \right) \right] = 0\,.$$

Si deduce che la funzione ha l'asintoto obliquo di equazione

$$y = 2\,x\,.$$

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x - 1 > 0$ e $x - 2 \neq 0$. Si ha quindi

$$D =]1, 2[\cup]2, +\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-2)^2}\,.$$

4) Risulta

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \log|x| - \log|x+1| + C$$

Per il calcolo dell'integrale proposto calcoliamo

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0^+} \int_t^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx &= \lim_{t\to0^+} \left[\log(x) - \log(x+1)\right]_t^1 \\
&= \lim_{t\to0^+} \left(-\log(2) - \log(t) + \log(t+1)\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Si conclude che la funzione data non risulta integrabile in senso improprio sull'intervallo $[0, 1]$.